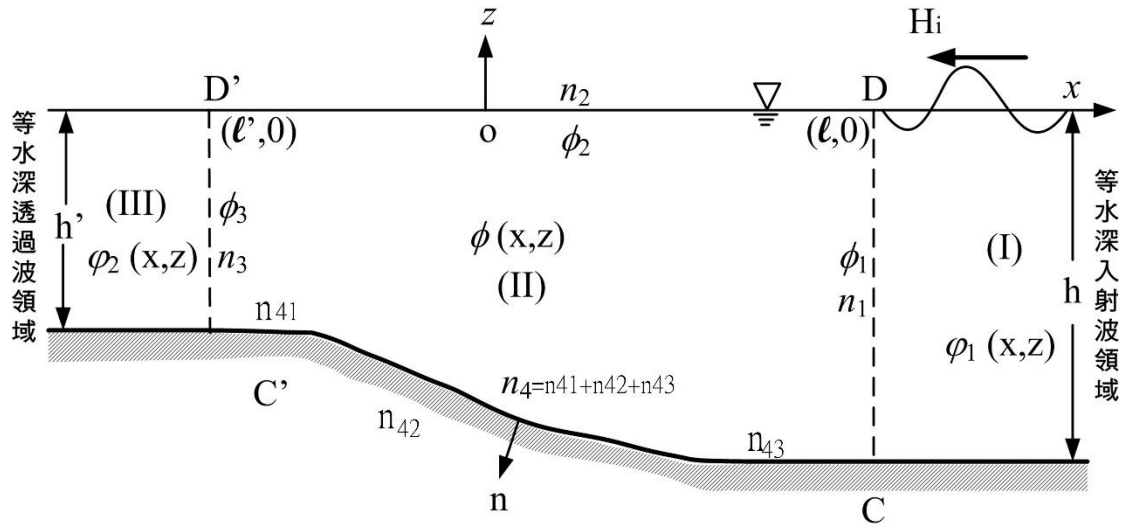


頻率領域2維任意海底地形引起波變形

如圖所示任意海底地形，說明如何應用邊界元素法數值解析。首先說明各種流體領域支配方程式及邊界條件，進而推導入射波領域及透過波領域的速度勢解析解，說明如何應用邊界元素法對任意變化地形或有結構物存在領域的解析方法，最後說明波高、波壓、反射率及透過率等物理量。



1. 理想流體微小振幅波運動 2011 埃及尼羅河之旅

設定流體為非粘性非壓縮性理想流體，靜水面取座標原點 o ，水平向右及垂直向上方向取 x 及 z 軸，時間及重力加速度以 t 及 g 表示，入射波為振幅 ζ_0 、週頻率 $\sigma (=2\pi/T; T$ 為波週期)的簡谐波，流體運動的微小振幅波速度勢 Φ 可以下式表示。

$$\Phi(x, z; t) = \frac{g\zeta_0}{\sigma} \phi(x, z) \exp(i\sigma t)$$

(1) 支配方程式

勢函數 $\phi(x, z)$ 應為滿足下列Laplace方程式的函數

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

水平及垂直方向流速 u, w ；流體壓力 p ；水面波形 ζ ，流體密度為 ρ 時，可以下式表示

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{p}{\rho g \zeta_0} = -i\phi(x, z)e^{i\sigma t}$$

$$\zeta / \zeta_0 = -i\phi(x, 0)e^{i\sigma t}$$

(2) 靜水面邊界條件

靜水面上，由於運動學條件及大氣壓力一定的條件，可得下列

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \phi \quad (z=0)$$

(3) 固定不透水面邊界條件

固定不透水面，由於流體在法線方向流速為零，得

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad n: \text{法線方向}$$

(4) 考量摩擦效應不透水海底邊界條件 尼羅河之旅

若海底面具有摩擦效應，摩擦係數為 α_f 時， ϕ 與 $\bar{\phi}$ 間的關係為

$$\bar{\phi} = i\alpha_f \phi \quad \text{或} \quad \bar{\phi} = \alpha_f \phi \quad (\text{依程式設計而異})$$

不考量海底摩擦時， α_f 等於0， α_f 必須依實驗決定。

(5) 假想邊界條件

守恆原則下，在任意假想位置的邊界條件有2:

① 假想邊界兩側的流體運動引起的能量流束必須連續，即兩側流體作用於假想

邊界面的壓力必須相等，壓力可依壓力方程式計算。

② 假想邊界兩側的流體運動引起的質量流束必須連續，即兩側流體通過假想

界面的流量(兩側等水深時為流速)必須相等。

依上述2條件可推導出任意假想位置的邊界條件。阿拉丁神燈

海底地形作不規則變化，進行數值分析，假定簡諧入射波從右向x軸負方向進行。解析波浪受海底地形變化引起波變形，此時有2種解析方法可應用:

① 嚴密解

如圖，假定從C點向右側的水深一定為h，從C'點向左側水深為h'，在一定水深與任意水深交接處設置假想邊界線，將流體領域分割成一定水深領域

及任意水深變化領域，一定水深領域流體運動，考量因地形變化引起波散射現象，屬數值嚴密解析解，可節省電子計算機計算容量及時間，但是公式推導過程比較複雜，對非線性、非簡諧性或造波問題困難度較高。嚴密解時，C點可設置於入射波等水深領域h內任意位置，甚至可設置於等水深與任意水深交接處。同樣，C'點可設定於透過波等水深領域h'內任意位置。

② 近似解

將一定水深領域設置於不受地形變化引起波**散射**現象處，入射波領域僅有入射波及反射波存在，透過波領域只有透過波存在，即忽略因地形變化所引起散射波，此方法屬數值近似解，好處是公式推導簡單，可推展至非線性、非簡諧性或造波問題，但是需大量電子計算機計算容量及時間。

入射波領域的波是由入射波，反射波及散射波等構成，不考量能量損失時入射波，反射波不會消失。散射波如**微小振幅波通解**所述，為無限級數組成的衰減波，衰減距離隨入射波特異而異，通常只要取級數第1項使其值為0的位置，即可視為散射波不存在處。由於隨入射波特異不同，可忽略散射波位置亦不同，通常數值計算，對欲分析波中，以週期最大的波，取其1個波長作為可忽略散射波的位置，決定C及C'位置。

本文以近似解作為說明例，嚴密解保留於後，供有意人士參考。

2. 入射波領域及透過波領域速度勢近似解

(1) 等水深入射波領域速度勢函數

如上圖，振幅 ζ_0 ，週頻率 σ 的簡諧波從水深h處向x軸負方向入射。在不受地形變化或結構物引起波散射現象的C、C'處分別作垂直線 \overline{CD} 及 $\overline{DC'}$ 將流體領域分割成 \overline{CD} 面右側為等水深h入射波領域(I)， $\overline{DC'}$ 面左側為等水深h'透過波領域(III)及由 $\overline{CDD'C'}$ 包圍的不等水深領域(II)。

水深一定h的入射波領域，勢函數 $\varphi_1(x, z)$ 可以下式表示

$$\varphi_1(x, z) = \left[e^{ik(x-\ell)} + A_0 e^{-ik(x-\ell)} \right] \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (2.1)$$

ℓ 為假想邊界線至原點O間距離，k及 k_0 為下列方程式的根

$$\frac{\sigma^2 h}{g} = kh \tanh kh$$

(2.1)式第1項及第2項分別表示入射波及反射波勢函數， A_0 為複數積分常數，

$|A_0|$ 表示反射率。假想邊界線 \overline{CD} 上勢函數及向x正方向導函數值可以下式表示

$$\varphi_1(\ell, z) = (1 + A_0) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (2.2)$$

(2) 等水深h'透過波領域的速度勢函數

同理，等水深 h' 透過波領域(III)勢函數如下

$$\varphi_2(x, z) = B_0 e^{-ik'(x-\ell')} \frac{\cosh k'(z+h')}{\cosh k'h'} \quad (2.3)$$

上式表示透過波， $|B_0|$ 為透過率， ℓ' 表示假想邊界線 \overline{DC} 至原點 O 距離， k' 為下列方程式的根

$$\frac{\sigma^2 h'}{g} = k'h' \tanh k'h'$$

假想邊界線 \overline{DC} 上勢函數及向 X 負方向導函數值可以下式表示

$$\varphi_2(-\ell', z) = B_0 \frac{\cosh k'(z+h')}{\cosh k'h'} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \varphi_2(-\ell', z) = -ik'B_0 \frac{\cosh k'(z+h')}{\cosh k'h'} \quad (2.5)$$

(3) 假想邊界線上 ϕ 與 $\bar{\phi}$ 間的關係式

① 等水深 h 入射波領域假想邊界線 \overline{CD} 尼羅河之旅

假想邊界線 \overline{CD} 上，由於橫貫 \overline{CD} 的質量流束及能量流束的連續，得

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(z) &= \phi_1(\ell, z) \\ \bar{\phi}_1(z) &= \bar{\phi}_1(\ell, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

將(2.4)及(2.5)式分別代入上式得

$$\phi_1(z) = (1+A_0) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (2.7)$$

$$\bar{\phi}_1(z) = ik(1-A_0) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (2.8)$$

將(2.7)式乘以 $\cosh k(z+h)$ ，對 $z=-h \sim 0$ 範圍作積分，得

$$\int_{-h}^0 ik(1-A_0) \cosh k(z+h) dz = \int_{-h}^0 \phi_1(z) \cosh k(z+h) dz$$

若邊界元素法採用1次元素時，將上式右邊積分等分割成 n_1 個近似值，得 A_0 如下

$$A_0 = 1 + \frac{i}{N_0 \sinh kh} \sum_{p=1}^{n_1} \bar{\phi}_1(p) \cdot \cosh k(z_p+h) \cdot \Delta z_p \quad (2.9)$$

$$N_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

n_1 是對假想邊界線 \overline{CD} 的分割數， $\Delta z_p = h/n_1$ 。若邊界元素法採用 2 次元素以上時，(2.9) 式會有不同形式，應另行討論。

將(2.9)式代入(2.6)式，得在假想邊界線 \overline{CD} 上 ϕ_1 及 $\bar{\phi}_1$ 間的關係如下式

$$\phi_1(p) = 2 \frac{\cosh k(z_p + h)}{\cosh kh} + \sum_{r=1}^{n_1} f(r, p) \bar{\phi}_1(r) \cdot \Delta z_r \quad (2.10)$$

$$f(r, p) = i \frac{\cosh k(z_r + h) \cosh k(z_p + h)}{N_0 \sinh kh \cosh kh} \quad (p=1, 2, \dots, n_1)$$

將(2.10)式以下列矩陣形式表示

$$\{\phi_1\} = \{Z\} + [F] \{\bar{\phi}_1\} \quad (2.11)$$

$$Z = 2 \frac{\cosh k(z_j + h)}{\cosh kh}$$

$$F = f(i, j) \Delta z_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_1)$$

(2.11) 式是假想邊界線 \overline{CD} 上勢函數及導函數值的 1 次關係式。

② 等水深 h' 透過波領域假想邊界線 $\overline{DC'}$ 上

等水深 h' 透過波領域 $\overline{DC'}$ 上，同理可得

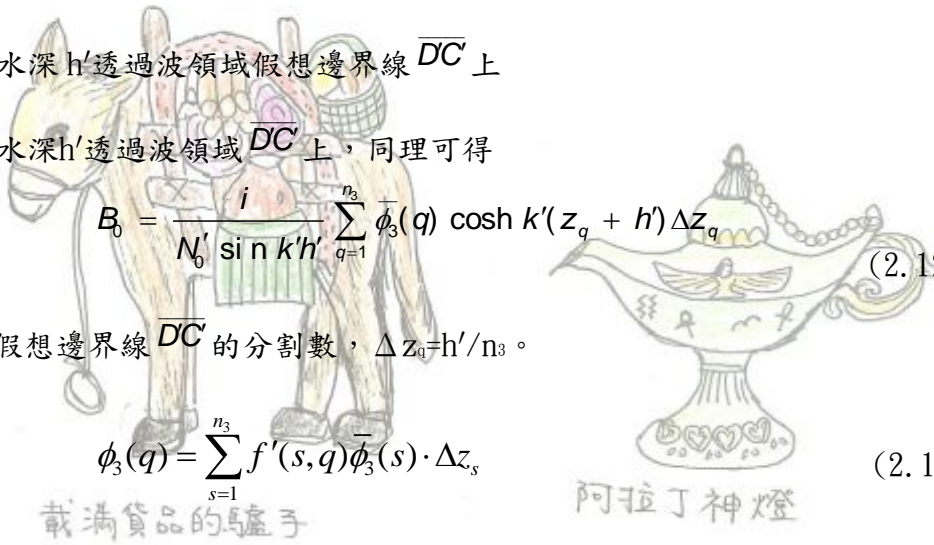
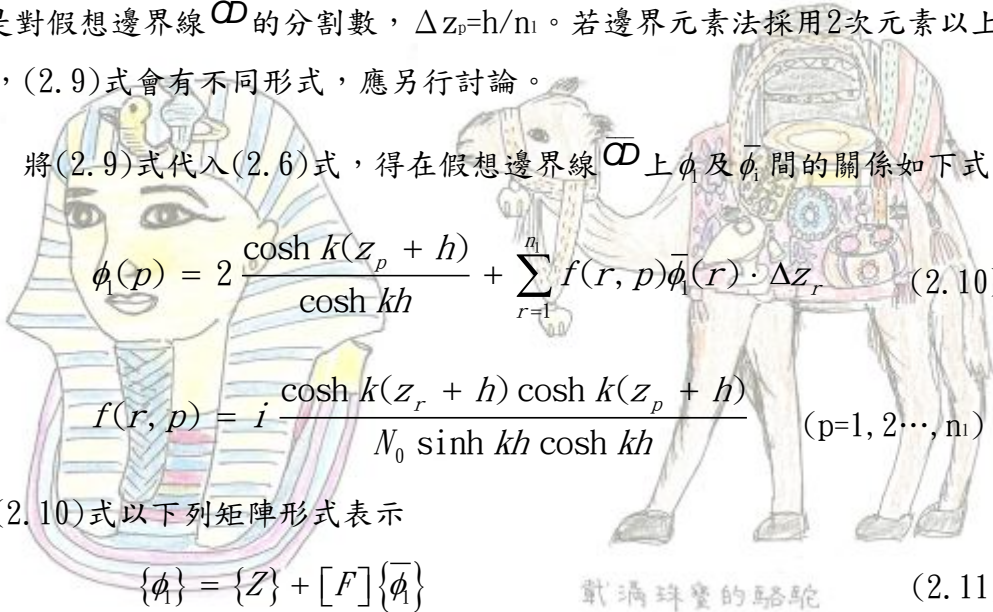
$$B_0 = \frac{i}{N'_0 \sinh k'h'} \sum_{q=1}^{n_3} \bar{\phi}_3(q) \cosh k'(z_q + h') \Delta z_q \quad (2.12)$$

n_3 是對假想邊界線 $\overline{DC'}$ 的分割數， $\Delta z_q = h'/n_3$ 。

$$\phi_3(q) = \sum_{s=1}^{n_3} f'(s, q) \bar{\phi}_3(s) \cdot \Delta z_s \quad (2.13)$$

$$f'(s, q) = i \frac{\cosh k'(z_s + h') \cosh k'(z_q + h')}{N'_0 \sinh k'h' \cosh k'h'} \quad (q=1, 2, \dots, n_3)$$

$$N'_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k'h'}{\sinh 2k'h'} \right)$$



將(2.13)式以下列矩陣形式表示

$$\{\phi_3\} = [F'] \{\bar{\phi}_3\} \quad (2.14)$$

$$F' = f'(i, j) \Delta z_j \quad (i, j=1, 2, \dots, n_3)$$

(2.14)式是假想邊界線 \overline{DC} 上勢函數及導函數值的 1 次關係式。

(4) 任意水深領域邊界面上速度勢函數與導函數間的關係式

任意水深領域(II)邊界線係由 $\overline{CDD'C'C}$ 構成，將邊界線以一定元素或線性元素離散化，對邊界線 \overline{CD} 、 $\overline{DD'}$ 、 $\overline{D'C'}$ 、 $\overline{C'C}$ 依逆時針方向分別以 n_i ($i=1 \sim 4$) 個一定或線性元素加以分割。海底可設定為具有摩擦效應，設定海底法線方向速度勢導函數為 0 時，不具有摩擦效應。本文只舉一定元素為例說明。

任意地形斷面領域(II)邊界面上速度勢函數 ϕ 與導函數 $\bar{\phi}$ 間的關係式，依 2 維邊界元素法(一定元素)，得

$$\Phi = K \bar{\Phi} \quad (2.15)$$

2011 埃及尼羅河之旅

為將上述任意水深領域(II)各邊界的邊界條件代入上式，將上式以下列部份矩陣形式表示。

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \\ \bar{\phi}_4 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

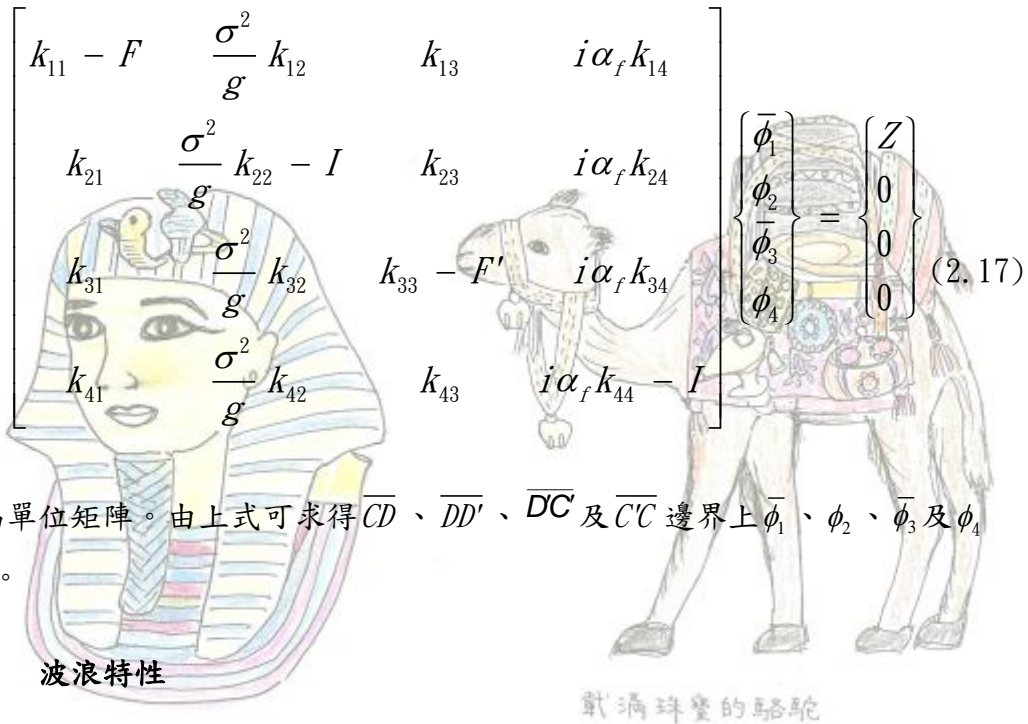
{K} 各項係數隨採用一定元素或線性元素而異。

(5) 連立方程式

將(1)~(3)所示各邊界條件，代入(2.16)式得

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈

$$\begin{bmatrix}
 k_{11} - F & \frac{\sigma^2}{g} k_{12} & k_{13} & i\alpha_f k_{14} \\
 k_{21} & \frac{\sigma^2}{g} k_{22} - I & k_{23} & i\alpha_f k_{24} \\
 k_{31} & \frac{\sigma^2}{g} k_{32} & k_{33} - F' & i\alpha_f k_{34} \\
 k_{41} & \frac{\sigma^2}{g} k_{42} & k_{43} & i\alpha_f k_{44} - I
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \bar{\phi}_1 \\
 \bar{\phi}_2 \\
 \bar{\phi}_3 \\
 \bar{\phi}_4
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 Z \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad (2.17)$$


I 為單位矩陣。由上式可求得 \overline{CD} 、 $\overline{DD'}$ 、 \overline{DC} 及 \overline{CC} 邊界上 $\bar{\phi}_1$ 、 $\bar{\phi}_2$ 、 $\bar{\phi}_3$ 及 $\bar{\phi}_4$ 值。

(6) 波浪特性

① 反射率及通過率

因海底地形變化或結構物引起反射率 k_r 及通過率 k_t 為

$$\left. \begin{aligned}
 k_r &= |A_0| \\
 k_t &= |B_0|
 \end{aligned} \right\} \text{2011 埃及尼羅河之旅}$$

反射率 A_0 可依 (2.9) 式及通過率 B_0 可依 (2.12) 式求得。

② 水面波高分佈

i. 等水深入射波領域

$$\left| \frac{\zeta}{\zeta_0} \right| = \left| e^{ik(x-l)} + A_0 e^{-ik(x-l)} \right|$$

l 為座標原點至入射波領域假想邊界面的距離

ii. 等水深透過波領域

$$\left| \frac{\zeta}{\zeta_0} \right| = \left| B_0 e^{ik'(x+l')} \right|$$

l' 為座標原點至透過波領域假想邊界面的距離

iii. 任意海底地形或結構物存在領域

$$\left| \frac{\zeta}{\zeta_0} \right| = |\phi_3|$$

假想邊界面上 ϕ_3 值可由下式求得。

$$\{\phi_3\} = [k_{31}] \{\bar{\phi}_1\} + [k_{32}] \{\bar{\phi}_2\} + [k_{33}] \{\bar{\phi}_3\} + [k_{34}] \{\bar{\phi}_4\}$$

領域內任意1點的 ϕ 值可以下列離散化和分方程式表示

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j G_{xj} - \sum_{j=1}^n \phi_j \hat{H}_{xj}$$

計算 G_{xj} 及 \hat{H}_{xj} ，只需要將 G_{ij} 及 \hat{H}_{ij} 式中 i 點座標，以領域內計算點座標 (x, y) 取代即可。

③ 任意地形領域流速分佈

領域內水分子運動速度可以經由邊界上各點速度勢對 x 及 z 的偏微分求得：

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\partial \Phi(x, z; t)}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Phi(\xi, \eta; t)}{\partial n} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r} \right) - \Phi(\xi, \eta; t) \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \Phi(\xi, \eta; t)}{\partial n} \left(\frac{\xi - x}{r^2} \right) - \Phi(\xi, \eta; t) \left[\frac{\partial x}{\partial n} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2(\xi - x)^2}{r^4} \right) - \frac{\partial z}{\partial n} \left(\frac{2(\xi - x)(\eta - z)}{r^4} \right) \right] \right\} d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{\partial \Phi(x, z; t)}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Phi(\xi, \eta; t)}{\partial n} \left(\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{1}{r} \right) - \Phi(\xi, \eta; t) \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \Phi(\xi, \eta; t)}{\partial n} \left(\frac{\eta - z}{r^2} \right) - \Phi(\xi, \eta; t) \left[\frac{\partial z}{\partial n} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2(\eta - z)^2}{r^4} \right) - \frac{\partial x}{\partial n} \left(\frac{2(\xi - x)(\eta - z)}{r^4} \right) \right] \right\} d\Gamma \end{aligned}$$

3. 入射波領域及透過波領域速度勢嚴密解(供有意人士參考)

(1) 等水深 h 入射波領域速度勢函數

振幅 ζ_0 ，週頻率 σ 的簡諧波從水深 h 處向左入射。在 C, C' 處分別作垂直線 CD 及 $C'D'$ 將流體領域分割成 CD 面右側等水深 h 入射波領域(I)， CD' 面左側等水深 h' 透過波領域(III)及由 $CDD'C'$ 包圍不等水深領域(II)。一定水深 h 入射波領域，勢函數 $\phi_1(x, z)$ 可以下式表示

$$\begin{aligned} \phi_1(x, z) &= \left[e^{ik(x-\ell)} + A_0 e^{-ik(x-\ell)} \right] \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-k_m(x-\ell)} \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ℓ 為假想邊界線至原點 O 間距離， k 及 k_m 為下列分散關係式的根

$$kh \tanh kh = -k_m h \tanh k_m h = \sigma^2 h / g \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.2)$$

(3.1)式第1項及第2項分別表示入射波及反射波的勢函數，第3項級數項表示
 散射波勢函數， A_0 及 A_m 為複數積分常數， $|A_0|$ 表示反射率。

假想邊界線 \overline{CD} 上勢函數及其向x正方向導函數值，可以下式表示

$$\varphi_1(\ell, z) = (1 + A_0) \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\cos k_m(z + h)}{\cos k_m h} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(\ell, z) = ik(1 - A_0) \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m k_m \frac{\cos k_m(z + h)}{\cos k_m h} \quad (3.4)$$

假想邊界線 \overline{CD} 上，由於橫貫 \overline{CD} 的質量流束及能量流束的連續，得

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(z) &\equiv \varphi_1(\ell, z) \\ \bar{\phi}_1(z) &\equiv \bar{\varphi}_1(\ell, z) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

將(3.4)及(3.5)式分別代入上式得

$$(1 + A_0) \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\cos k_m(z + h)}{\cos k_m h} = \phi_1(z) \quad (3.6)$$

$$ik(1 - A_0) \frac{\cosh k(z + h)}{\cosh kh} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m k_m \frac{\cos k_m(z + h)}{\cos k_m h} = \bar{\phi}_1(z) \quad (3.7)$$

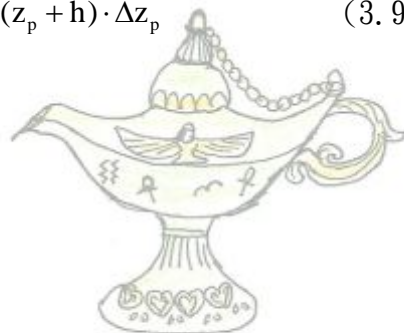
將(3.6)式的各項分別乘以 $\cosh k(z+h)$ 及 $\cos k_m(z+h)$ ，對 $z = -h \sim 0$ 範圍作積分
 得 A_0 及 A_m 如下

$$A_0 = 1 + \frac{i}{N_0 \sinh kh} \sum_{p=1}^{n_1} \bar{\phi}_1(p) \cdot \cosh k(z_p + h) \cdot \Delta z_p \quad (3.8)$$

$$A_m = -\frac{i}{N_0 \sin \lambda_m} \sum_{p=1}^{n_1} \bar{\phi}_1(p) \cdot \cosh k_m(z_p + h) \cdot \Delta z_p \quad (3.9)$$

n_1 是對假想邊界線 \overline{CD} 的分割數。

$$\left. \begin{aligned} \Delta z_p &= \frac{1}{2} (z_{p+1} - z_{p-1}) \\ N_0 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \\ N_m &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k_m h}{\sin 2k_m h} \right) \end{aligned} \right\}$$



阿拉丁神燈

將(3.8)及(3.9)式的 A_0 及 A_m 代入(3.5)式，得在假想邊界線 \overline{CD} 上 ϕ_1 及 $\bar{\phi}_1$ 間的關
 係如下式

$$\phi_1(p) = 2 \frac{\cosh k(z_p + h)}{\cosh kh} + \sum_{r=1}^{n_1} f(r, p) \bar{\phi}_1(r) \cdot \Delta z_r \quad (3.10)$$

$$f(r, p) = i \frac{\cosh k(z_r + h) \cosh k(z_p + h)}{N_0 \sinh kh \cosh kh} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos k_m(z_r + h) \cos k_m(z_p + h)}{N_m \sin k_m h \cos k_m h} \quad (3.11)$$

將上式以下列矩陣形式表示

$$\{\phi\} = \{Z\} + [F] \{\bar{\phi}\} \quad (3.12)$$

$$Z = 2 \frac{\cosh k(z_j + h)}{\cosh kh}$$

$$F = f(i, j) \Delta z_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_1)$$

(3.12)式是假想邊界線 \overline{CD} 上勢函數及導函數值的1次關係式。

(2) 等水深透過波領域的速度勢函數及尼羅河之旅

$$\varphi_2(x, z) = B_0 e^{-ik'(x-\ell')} \frac{\cosh k'(z + h')}{\cosh k'h'} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k'_n(x-\ell')} \frac{\cos k'_n(z + h')}{\cos k'_n h'} \quad (3.13)$$

第1項表示透過波，第2項級數項表示散射波， ℓ' 表示假想邊界線 $\overline{C'D}$ 至原點O距離， k' 及 k'_n 分別為下列分散關係式的根

$$k'h' \tanh k'h' = -k'_n h' \tanh k'_n h' = \sigma^2 h' / g \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.14)$$

假想邊界線 $\overline{C'D}$ 上勢函數及其向x負方向導函數值，可以下式表示

$$\varphi_2(-\ell', z) = B_0 \frac{\cosh k'(z + h')}{\cosh k'h'} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\cos k'_n(z + h')}{\cos k'_n h'} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi_2(-\ell', z) = -ik'B_0 \frac{\cosh k'(z + h')}{\cosh k'h'} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n k'_n \frac{\cos k'_n(z + h')}{\cos k'_n h'} \quad (3.16)$$

$\overline{D'C'}$ 上同理可得

$$B_0 = \frac{i}{N'_0 \sinh k'h'} \sum_{q=1}^{n_3} \bar{\phi}_3(q) \cosh k'(z_q + h') \cdot \Delta z_q \quad (3.17)$$

$$B_n = \frac{i}{N'_n \sin k'_n h'} \sum_{q=1}^{n_3} \bar{\phi}_3(q) \cos k'_n(z_q + h') \cdot \Delta z_q \quad (3.18)$$

n_3 是對假想邊界線 $\overline{C'D}$ 的分割數。

$$\phi_3(q) = \sum_{s=1}^{n_3} f'(s, q) \bar{\phi}_3(s) \cdot \Delta z_s \quad (3.19)$$

$$f'(s, q) = i \frac{\cosh k'(z_s + h') \cosh k'(z_q + h')}{N_0 \sinh k' h' \cosh k' h'}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos k'_n(z_s + h') \cos k'_n(z_q + h')}{N_n \sin k'_n h' \cos k'_n h'}$$

$$N'_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k'h'}{\sinh 2k'h'} \right), \quad N'_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k'_n h'}{\sin 2k'_n h'} \right)$$

將(3.19)式以下列矩陣形式表示

$$\{\phi\} = [F'] \{\bar{\phi}\} \quad (3.20)$$

$$F' = f'(i, j) \cdot \Delta z_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n_3)$$

(3.20)式是假想邊界線 $\overline{C'D}$ 上勢函數及導函數值的1次關係式。



載滿貨品的驢子



阿拉丁神燈

回分類索引

回海洋工作站

2011 埃及尼羅河之旅